

CHAPITRE II

LA COUCHE LIMITE LAMINAIRE

I/ : Examen qualitatif des phénomènes:

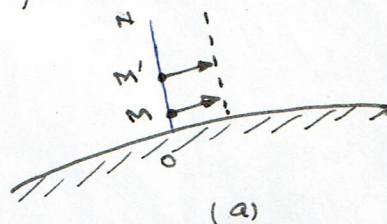
I.1/ Généralités sur la couche limite :

Dans la théorie des fluides parfaits incompressibles, la répartition des vitesses ou des pressions, la forme des lignes de courant ne dépendaient pas de la nature du fluide mais elles sont déterminées par la géométrie des parois limitant l'écoulement.

Considérons l'écoulement d'un fluide autour d'un obstacle fixe et ON une normale à la paroi.

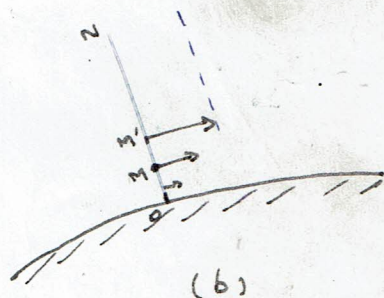
a) Écoulement d'un fluide parfait :

La vitesse du fluide est orientée tangentiellement à la paroi pour le pt M , la vitesse du pt M' (voisin de M) est sensiblement la même qu'en M parcequ'il n'y a un glissement des particules fluides sur la paroi.



b) Écoulement d'un fluide visqueux :

La vitesse à la paroi est nulle et elle croît suivant ON et atteint à une certaine distance la valeur théorique proposée par la solution des fluides parfaits. Si le fluide est visqueux une résistance de la paroi apparaît au voisinage de celle-ci; et qui dépend des conditions d'écoulement. Au voisinage immédiat de la paroi, la vitesse croît suivant la viscosité du fluide \Rightarrow la vitesse sera petite ou grande.



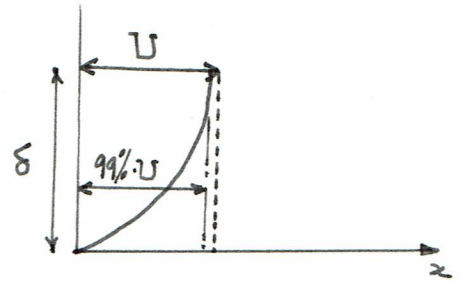
I.2 : Couche limite

C'est la couche (épaisseur) dans laquelle la vitesse varie de 0 (sur la paroi) à la valeur qu'aurait la vitesse pour un fluide parfait.

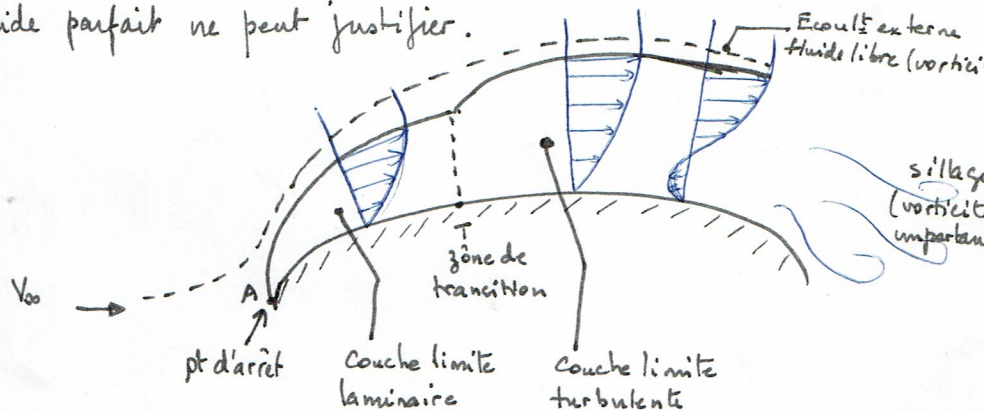
L'épaisseur de la couche limite est définie comme étant la distance y (ou z) à laquelle la vitesse u atteint 99% de la valeur qu'elle aurait en F.P. (U).

δ est d'autant plus grande que le fluide est plus visqueux ($\delta \approx 2\text{mm}$ pour l'eau sur 1 plaque plane).

L'écoulement potentiel est celui qui est à l'extérieur de la couche limite.



La théorie de la couche limite formulée par Prandtl en 1904 étudie les effets de la viscosité dans le cas de fluide faiblement visqueux, permettant ainsi de donner une explication à de nombreux phénomènes de mécanique observés avec les fluides visqueux : résistance aérodynamique, formation de sillage etc... que la théorie de fluide parfait ne peut justifier.



Developpement de la couche limite

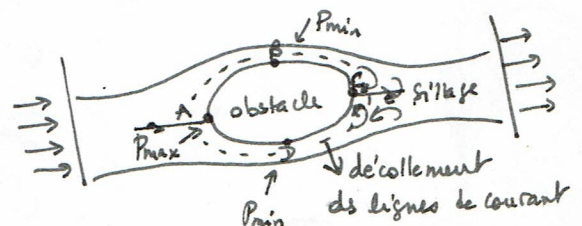
Dans la couche limite les gradients de vitesse sont élevés, et les forces de viscosité mises en jeu sont importantes :

I.3 formation de sillages:

Avec certaines précautions cette zone (c. limite) est le siège de mot tourbillonnaires très intenses et qui ne sont pas permanents même si l'écoulement en amont est permanent.

A et C des pts d'arrêts $\Rightarrow V=0$

B et D max. de la courbure $\Rightarrow V=V_{max}$



de A en B $\vec{\text{grad}} P$ favorable (p décroissante)
 de B en C $\vec{\text{grad}} P$ défavorable (P croissante)

En B les particules ont acquis de l'énergie cinétique en dépit de q
 l'obstacle est entouré d'une mince couche (couche limite) dans laquelle les particules
 n'ont pas d'énergie cinétique notable (E_c faible). La variation de pression
 est liée à la variation de vitesse par l'éq de Bernoulli, donc
 de A à B: $\frac{dP}{dz} < 0$ et $\frac{du}{dy} > 0$ (pas de problème)

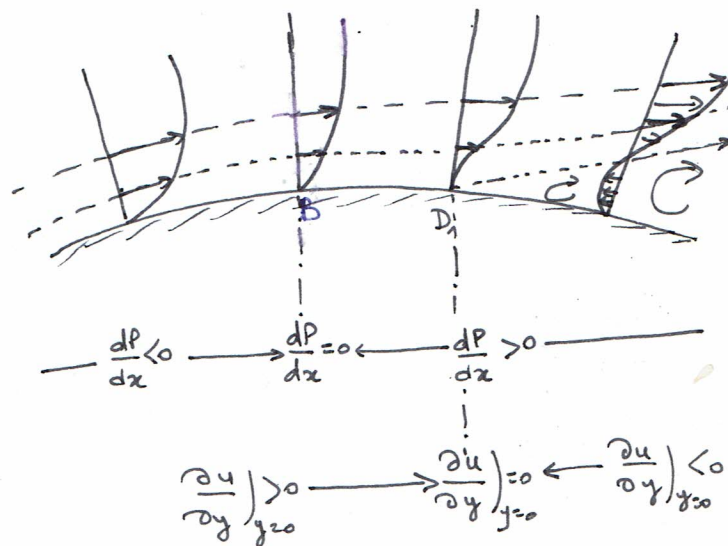
au pt B: $\frac{dP}{dz} = 0$ et $\frac{du}{dy} > 0$

A partir du pt B: $\frac{dP}{dz} > 0$ et $\frac{du}{dy} > 0$ alors les particules sont repoussées

A un certain pt D_1 entre B et C on aura:

en D_1 : $\frac{dP}{dz} > 0$ et $\frac{du}{dy} = 0$ en ce point la tangente au profil des vitesses
 est normale à la paroi, et la tension visqueuse
 pariétale $\tau_{00} = 0$

Du point D_1 il y a création d'un écoulement inversé et les particules
 vont tourner et former un bloc tq. l'écoulement principal soit soulevé et qu'il
 sera par la suite le siège d'un sillage (détachement aléatoire des tourbillons)



II Couche limite dynamique laminaire:

II.1/ Les hypothèses de base:

- On suppose que l'écoulement est plan, permanent et laminaire (dans la couche limite)
- Les vitesses sont // entre elles (dans la couche limite) et \perp à un plan de section droite).
- $\delta \ll D_0$ (dimension de l'obstacle) et $\delta \ll R$ (rayon de l'obstacle)
- Les caractéristiques du fluide (μ, ρ) sont constantes.

II.2 / Equations générales :

Pour un écoulement permanent et bidimensionnel, les équations de la couche limite sont les équations de Navier-Stokes.

$$\begin{cases} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P^*}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \\ u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P^*}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (\text{Eqt de continuité}) \end{cases}$$

Conditions aux limites :

$$y=0 \Rightarrow u=v=0 \quad (\text{adhérence à la paroi})$$

$$y \rightarrow \infty \Rightarrow u=U(x) \quad \text{vitesse d'un fluide parfait à l'ext. de la couche}$$

A l'extérieur de δ , P et ρU sont liés par l'eqt de Poiseuille :

$$\Rightarrow P^* + \frac{1}{2} \rho U^2 = \text{cte}$$

II.3 Equations de la couche limite (approximations)

Pour donner une signification physique et une image de l'ordre de grandeur des approximations, nous allons exprimer le tout en variables réduites en prenant :

D_0 (dimension de l'obstacle)

U_0 (vitesse à l'extérieur de la couche limite) } paramètres de référence

On pose les termes adimensionnels suivants :

$$\begin{cases} u' = \frac{u}{U_0}, \quad v' = \frac{v}{U_0}, \quad U' = \frac{U}{U_0} \\ x' = \frac{x}{D_0}, \quad y' = \frac{y}{D_0}, \quad P'^* = \frac{P^*}{\rho U_0^2} \end{cases}$$

Nous aurons donc les eqts adimensionnelles :

$$\begin{cases} \frac{U_0^2}{D_0} \left(u' \frac{\partial u'}{\partial x'} + v' \frac{\partial u'}{\partial y'} \right) = -\frac{U_0^2}{D_0} \frac{\partial P'^*}{\partial x'} + \nu \frac{U_0}{D_0^2} \left(\frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial y'^2} \right) \\ \frac{U_0^2}{D_0} \left(u' \frac{\partial v'}{\partial x'} + v' \frac{\partial v'}{\partial y'} \right) = -\frac{U_0^2}{D_0} \frac{\partial P'^*}{\partial y'} + \nu \frac{U_0}{D_0^2} \left(\frac{\partial^2 v'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 v'}{\partial y'^2} \right) \\ \frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\partial v'}{\partial y'} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u' \frac{\partial u'}{\partial x'} + v' \frac{\partial u'}{\partial y'} = -\frac{\partial P^*}{\partial x'} + \frac{\nu}{D_0 L_0} \left(\frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial y'^2} \right) \\ u' \frac{\partial v'}{\partial x'} + v' \frac{\partial v'}{\partial y'} = -\frac{\partial P^*}{\partial y'} + \frac{\nu}{D_0 L_0} \left(\frac{\partial^2 v'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 v'}{\partial y'^2} \right) \end{cases}$$

posons : $R = \frac{L_0 D_0}{\nu}$ les eqs deviennent alors :

$$(1) \quad u' \frac{\partial u'}{\partial x'} + v' \frac{\partial u'}{\partial y'} = -\frac{\partial P^*}{\partial x'} + \frac{1}{R} \left(\frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial y'^2} \right)$$

$$(2) \quad u' \frac{\partial v'}{\partial x'} + v' \frac{\partial v'}{\partial y'} = -\frac{\partial P^*}{\partial y'} + \frac{1}{R} \left(\frac{\partial^2 v'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 v'}{\partial y'^2} \right)$$

$$(3) \quad \frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\partial v'}{\partial y'} = 0$$

Conditions aux limites :

$$y' = 0, \quad u' = v' = 0$$

$$y' \rightarrow \infty, \quad u' = 0$$

Raisonnement de Prandtl (1904) sur la couche limite.

On a supposé que $\frac{\delta}{D_0} = \epsilon \ll 1$ (hypothèse)

On rapporte x à une longueur D_0 de telle sorte que :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{L_0}{D_0} \frac{\partial u'}{\partial x'} \quad \text{pour que } \frac{\partial u}{\partial x} \text{ et } \frac{\partial u'}{\partial x'} \text{ aient le même ordre de grandeur}$$

$\frac{\partial u'}{\partial x'}$ ait un ordre de grandeur unité (1)

$$\Rightarrow \boxed{u' \sim x' \approx 1}$$

Ainsi de l'eq. de continuité on a : $\frac{\partial v'}{\partial y'} \sim 1$

$$0 < u < U(x) \Rightarrow 0 < u' < U(x)/L_0$$

L'ordre de grandeur de v est le même ordre que celui de δ

$$\text{donc } v' \sim \epsilon \quad \left\{ \begin{array}{l} \Leftrightarrow v' \sim y' = \frac{y}{D_0} = \frac{y}{\delta} \cdot \frac{\delta}{D_0} \sim \epsilon \\ \text{et } \frac{\partial v'}{\partial y'} \sim \epsilon \end{array} \right.$$

$$\text{et } v' \sim y' \sim \epsilon$$

et

$$\frac{\partial}{\partial x'} \left(\frac{\partial u'}{\partial x'} \right) \sim 1$$

$$\text{on prend } \frac{\partial P^*}{\partial x'} \sim 1$$

$$\frac{\partial}{\partial y'} \left(\frac{\partial u'}{\partial y'} \right) \sim \frac{1}{\epsilon^2}$$

$$\frac{\partial P^*}{\partial y'} \sim \frac{\delta'}{D_0} ?$$

dans l'éq (1) le terme $\frac{1}{Re} (1 + \frac{1}{\epsilon^2})$ on a 1 est négligeable devant $\frac{1}{\epsilon^2}$
 ou $\frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2} \ll \frac{\partial^2 u'}{\partial y'^2}$
 donc $\frac{1}{Re \epsilon^2} \sim 1$ (m^e ordre de grandeur que les autres équations termes de l'éq.

$$\text{donc } \frac{1}{\sqrt{Re}} \sim \epsilon = \frac{\delta}{D_0}$$

En reportant ces conditions dans l'équation (2), on trouve que tous les termes sont au plus d'ordre ϵ , ce qui conduit à dire que les variations transversales de P^* sont de l'ordre $\epsilon^2 \Rightarrow$ Les variations de P^* dans la direction sont négligeables.

$$\frac{\partial P^*}{\partial y'} \sim \epsilon \Rightarrow \Delta P^* = \int_0^{\epsilon} \frac{\partial P^*}{\partial y'} dy' \sim \epsilon^2 \ll 1$$

On peut donc conclure que la pression exercée à l'intérieur la couche limite est due à celle du fluide potentiel (pression extérieure). La pression ne varie donc que suivant x et on notera $\frac{\partial P^*}{\partial x'} = \frac{dP^*}{dx'}$ (longitudinale). On peut calculer $P^*(x)$ si on connaît la pression à l'extérieur de la couche limite (δ) (terme supposé connu par l'expression de Bernoulli à l'extérieur de la couche limite).

À la frontière de la couche limite: $U' = U_0(x)$
 et $U' \frac{dU'}{dx'} = - \frac{dP^*}{dx'}$ Eq^t à l'ext. de la couche limite (m^e que celle de Bernoulli) qui nous permet de déterminer $\frac{dP^*(x)}{dx'}$

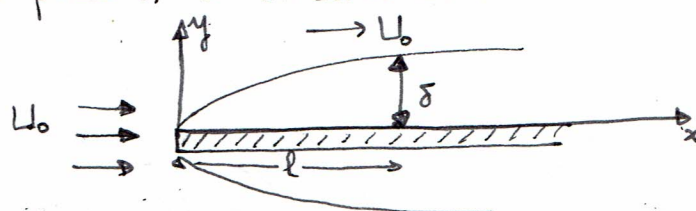
Les équations de la couche limite sont alors:

$$\begin{cases} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{dP^*}{dx} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{et } y=0 & \text{ on a } u=v=0 \\ y \rightarrow \infty & \quad u = U(x) \end{aligned}$$

III Cas de la plaque plane placée // à un écoulement:

Ce problème a été étudié en 1908 par Blasius.



La vitesse U_0 est // à la plaque. On suppose que la plaque est semi-infinie suivant x et z .

La résolution exacte de Blasius sur une plaque plane sans gradient de pression et que la vitesse de l'écoulement potentiel est constante est obtenue à partir des équations réduites de la couche limite.

$$\begin{cases} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \end{cases} \quad \left(\begin{array}{l} \text{sans gradient de pression} \\ P^* + \frac{1}{2} \rho U_0^2 = \text{cte} \Rightarrow \frac{dP^*}{dx} + \rho U_0 \frac{dU_0}{dx} = 0 \\ \Rightarrow \frac{dP^*}{dx} = 0 \end{array} \right)$$

et les conditions aux limites :

$$y=0 \Rightarrow u=v=0$$

$$y \rightarrow \infty \Rightarrow u=U_0$$

Cherchons une solution affine de la forme :

$$\frac{u}{U_0} = f'(\eta) \quad \text{avec} \quad \eta = \frac{y}{\beta(x^p)} \quad ; \quad \beta = g(x^p)$$

où η est la variable affine adimensionnelle $\Rightarrow [y] = [\beta]$

De l'équation de continuité on a :

$$\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial u}{\partial x} \Rightarrow v = -\int_0^y \frac{\partial u}{\partial x} dy = -\frac{\partial}{\partial x} \int_0^y u dy$$

$$v = -\frac{\partial}{\partial x} \left(\int_0^y U_0 \cdot f'(\eta) \cdot dy \right) = -\frac{\partial}{\partial x} \left(\int_0^\eta U_0 \beta f'(\eta) d\eta \right)$$

$$\text{donc} \quad v = -\frac{\partial}{\partial x} [U_0 \beta f] = -U_0 \left[\beta' f + \beta f' \frac{d\eta}{dx} \right]$$

$$= -U_0 \left[\beta' f + \beta f' \left(-y \frac{\beta'}{\beta^2} \right) \right] = -U_0 \beta' [f - \eta f']$$

$$\boxed{v = U_0 \beta' [\eta f' - f]}$$

D'autres part:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} = -U_0 f' U_0 f'' \frac{y}{\beta^2} \cdot \beta' = -U_0^2 \frac{\beta'}{\beta} \eta f' f''$$

$$v \frac{\partial u}{\partial y} = U_0 \beta' [\eta f' - f] U_0 \frac{f''}{\beta} = U_0^2 \frac{\beta'}{\beta} (\eta f' f'' - f f'')$$

On obtient donc pour l'éq^{te} du m^{ult}:

$$\boxed{-U_0^2 \frac{\beta'}{\beta} f f'' = \nu \frac{U_0}{\beta^2} f'''} \quad \text{avec } f \text{ sans dimension}$$

Si β est une fonction de x^p et $\eta = \frac{y}{\beta} \Rightarrow [\beta] = [L]$

et pour une solution de similitude, x peut être éliminé si les fonctions:

$$\frac{\beta'}{\beta} \text{ sera en } \frac{x^{p-1}}{x^p} \text{ et } \frac{1}{\beta^2} \text{ en } x^{-2p} \Leftrightarrow x^{-1} = x^{-2p} \Leftrightarrow \boxed{p = \frac{1}{2}}$$

D'autres part $\frac{\nu U_0}{\beta^2}$ doit avoir la dimension: LT^{-2} de $U_0^2 \frac{\beta'}{\beta}$

$$\text{donc } \frac{\nu U_0}{\beta^2} \sim \frac{U_0^2}{x} \Rightarrow \beta^2 \sim \frac{\nu x}{U_0}$$

$$\text{On peut donc poser: } \boxed{\beta = \sqrt{\frac{\nu x}{U_0}}}$$

L'équation différentielle que vérifie $f(\eta)$ est donc:

$$\boxed{f'''' + \frac{1}{2} f f'' = 0}$$

Eq^{te} diff. du 3^{ème} ordre ^{ordinaire} ~~non~~ linéaire

$$\text{avec } \begin{cases} \frac{u}{U_0} = f(\eta) \\ \eta = \frac{y}{\sqrt{\frac{\nu x}{U_0}}} \end{cases}$$

Les conditions aux limites pour $f(\eta)$ seront alors:

$$\begin{aligned} \eta = 0 &\Rightarrow f(0) = 0 \text{ et } f'(0) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{u}{U_0} = 0 \Leftrightarrow u = 0 \\ \frac{v}{U_0} = 0 \Leftrightarrow v = U_0 p' [\eta f' - f] = 0 \end{cases} \\ \eta \rightarrow \infty &\Rightarrow f'(\eta) \rightarrow 1 \\ &\quad \begin{cases} u = U_0 \Leftrightarrow y \rightarrow \infty \end{cases} \end{aligned}$$

Donc des 3 équations de Navier-Stokes on est arrivé à 1 eq^{te} diff. du 3^{ème} ordre ^{ordinaire} ~~non~~ linéaire avec 3 conditions aux limites (appelé eq^{te} de Blasius)

L'intégration numérique de cette équation était effectuée par Howarth (1938) et qui a donné les résultats ci-après:

$\eta = y/\beta$	$f' = \frac{u}{U_0}$
0	0
0,4	0,1328
1,2	0,3938
1,6	0,5168
2,4	0,729
3,2	0,8761
4,0	0,955
5,2	0,994
6,0	0,999

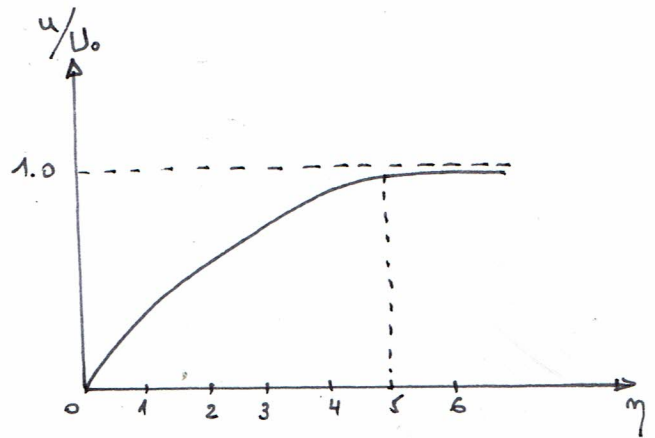


TABLEAU 4.1. — Solutions de l'équation de Blasius (d'après R. COMOLET).

η	F	F'	F''
0	0	0	0,332 06
0,2	0,006 64	0,066 41	0,331 99
0,4	0,026 56	0,132 77	0,331 47
0,6	0,059 74	0,198 94	0,330 08
0,8	0,106 11	0,264 71	0,327 39
1,0	0,165 57	0,329 79	0,323 01
1,4	0,322 98	0,456 27	0,307 87
1,8	0,529 52	0,574 77	0,282 93
2,2	0,781 20	0,681 32	0,248 35
2,6	1,072 52	0,772 46	0,206 46
3,0	1,396 82	0,846 05	0,161 36
4,0	2,305 76	0,955 52	0,064 24
5,0	3,283 29	0,991 55	0,015 91
6,0	4,279 64	0,998 98	0,002 40
7,0	5,279 26	0,999 92	0,000 22

IV LES ÉPAISSEURS DE LA COUCHE LIMITE.

Quand on se déplace sur une perpendiculaire Oy à la paroi, la vitesse u se rapproche assez rapidement d'une manière asymptotique de celle qui règne dans le fluide libre. On considère donc l'épaisseur de la couche limite comme étant la distance δ au delà de laquelle $\frac{u}{U_0} \geq 0,99$

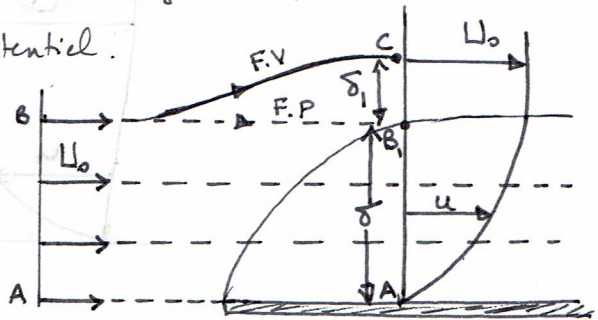
$$\text{pour } \eta = 5 \Rightarrow y = \delta \quad \text{et} \quad \eta = \frac{y}{\beta} = \frac{y}{\sqrt{\frac{\nu x}{U_0}}}$$

$$\text{donc } \boxed{\delta(x) = 5 \sqrt{\frac{\nu x}{U_0}}}$$

donc $\delta(x)$ varie en \sqrt{x}

Épaisseur de déplacement (δ_1):

l'épaisseur de déplacement δ_1 (ou de refoulement) ^{mesure} est la distance de déplacement de la ligne de courant entre un fluide visqueux et le fluide potentiel.



Si le fluide est parfait le débit en volume $\Phi_{AB} = \Phi_{A_1B_1}$ (par de déviation). Pour un fluide visqueux la ligne de courant se déplace d'une distance δ_1 (B_1C_1) vers le haut:

La conservation du débit entre la position initiale (AB) et la position finale (A_1C_1) donne:

$$\Phi_{AB} = \Phi_{A_1B_1} + U_0 \delta_1 \quad \text{et} \quad \begin{cases} \Phi_{AB} = U_0 \delta \\ \Phi_{A_1B_1} = \int_0^\delta u dy \end{cases}$$

$$U_0 \delta = \int_0^\delta u dy + U_0 \delta_1 \Rightarrow U_0 \delta_1 = \int_0^\delta (U_0 - u) dy$$

$$\boxed{\delta_1 = \int_0^\delta \left(1 - \frac{u}{U_0}\right) dy}$$

pour mesurer δ_1 il faut connaître δ .

Rq: On peut écrire $\delta_1 = \int_0^\infty \left(1 - \frac{u}{U_0}\right) dy = \int_0^\delta \left(1 - \frac{u}{U_0}\right) dy + \int_\delta^\infty \left(1 - \frac{u}{U_0}\right) dy$

Cas de la plaque plane :

on a :

$$\frac{u}{U_0} = f' \Rightarrow \delta_1 = \int_0^{\delta} (1 - f') dy = \sqrt{\frac{\nu x}{U_0}} \int_0^{\xi} (1 - f') d\eta$$

$$= \sqrt{\frac{\nu x}{U_0}} (1 - f(\xi))_0^{\xi} = \sqrt{\frac{\nu x}{U_0}} (1 - f(\xi))$$

On trouve :

$$\boxed{\delta_1 = 1,72 \sqrt{\frac{\nu x}{U_0}}} \Rightarrow \frac{\delta_1}{x} = \frac{1,72}{\sqrt{Re_x}}$$

* Épaisseur de quantité de mouvement (δ_2)

La perte de quantité de mouvement dans la couche limite par rapport à l'écoulement potentiel se traduit par δ_2 .

On raisonne sur les quantités de m^{u^2} au lieu des débits,

$$\rho U_0^2 \delta_2 = \rho \int_0^{\delta} u(U_0 - u) dy \Rightarrow \boxed{\delta_2 = \int_0^{\delta} \frac{u}{U_0} \left(1 - \frac{u}{U_0}\right) dy}$$

Cas de la plaque plane :

$$** \quad \delta_2 = \sqrt{\frac{\nu x}{U_0}} \int_0^{\xi} f'(1 - f') d\eta = \boxed{0,664 \sqrt{\frac{\nu x}{U_0}} = \delta_2}$$

* Épaisseur d'énergie (δ_3) et $\frac{\delta_2}{x} = \frac{0,664}{\sqrt{Re_x}}$

$$\left. \begin{aligned} f(0) &= f'(0) = 0 \\ f(\xi) &= 3,2832 \\ f'(\xi) &= 0,9915 \\ f''(\xi) &= 0,0159 \\ f'''(0) &= 0,3320 \end{aligned} \right\}$$

On égalise les énergies cinétiques :

$$\frac{\rho}{2} U_0^3 \delta_3 = \int_0^{\infty} \rho \frac{u}{2} (U_0^2 - u^2) dy \Rightarrow \delta_3 = \int_0^{\infty} \frac{u}{U_0} \left(1 - \frac{u^2}{U_0^2}\right) dy \approx \int_0^{\delta} \frac{u}{U_0} \left(1 - \frac{u^2}{U_0^2}\right) dy$$

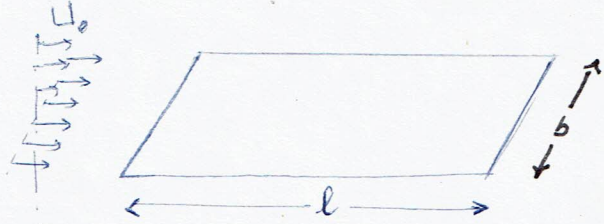
Les épaisseurs de couche limite augmentent comme \sqrt{x}
et donc : $\delta_2 < \delta_1 < \delta$.

$\frac{\delta_1}{\delta_2} = 2,59$ (paramètre de forme du profil des vitesses de Blasius)

$\delta_1, \delta_2, \delta_3$: représentent des flux des défauts de débit, de quantité de mouvement et d'énergie cinétique.

Frottement pariétal (à la paroi)

Soit une plaque plane de largeur (b) et de longueur (l).



La force de frottement sur la paroi est :

$$F_f = b \int_0^l \tau_0 \cdot dx \quad \text{et} \quad \tau_0(x) = \mu \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0}$$

$$u = U_0 \cdot f' \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial y} = U_0 \sqrt{\frac{U_0}{\nu x}} \cdot f''(\eta)$$

$$\eta = \frac{y}{\beta} = y \left(\frac{U_0}{\nu x} \right)^{1/2} \Rightarrow \tau_0(x) = \mu U_0 \sqrt{\frac{U_0}{\nu x}} \cdot \underbrace{f''(0)}_{0,332}$$

donc :

$$F_f = 0,332 \mu b \frac{U_0^{3/2}}{\sqrt{\nu}} \int_0^l \frac{dx}{\sqrt{x}} = \boxed{0,332 \mu b \frac{U_0^{3/2}}{\sqrt{\nu}} \cdot 2\sqrt{l}}$$

$$F_f = 0,664 \mu b U_0 \sqrt{\frac{U_0 \cdot l}{\nu}} = 0,664 \mu b U_0 \sqrt{Re_l}$$

avec : $\frac{U_0 \cdot l}{\nu} = Re_l$: Reynolds sur une longueur l de la plaque.

La force de frottement pariétal s'écrit aussi :

$$\boxed{F_f = 0,664 \cdot b \cdot \sqrt{U_0^3 \cdot \rho \cdot l}} \Rightarrow \text{puissance mécanique dissipée à la paroi par frottement visqueux}$$

$$P_f = F_f \cdot U_0 = 0,664 b (\mu \rho l)^{1/2} \cdot U_0^{5/2}$$

On définit 1 coeff. de frottement local } $C_x = \frac{\tau_0(x)}{\frac{1}{2} \rho U_0^2}$

$$\Rightarrow C_x = 0,664 \mu U_0^{-1/2} / (\rho \sqrt{\nu x}) = 0,664 \sqrt{\frac{\nu}{U_0 x}} = \frac{0,664}{\sqrt{Re_x}} = \frac{\delta_2}{x}$$

On définit un 2^{ème} coeff. C_f appelé coefficient de traînée de la plaque, qui est la valeur moyenne du coefficient de frottement pariétal C_x .

$$C_f \cdot l = \int_0^l C_x \cdot dx = 0,664 \sqrt{\frac{\gamma}{U_0}} \int_0^l \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 0,664 \times 2 \sqrt{\frac{\gamma}{U_0}} \cdot \sqrt{l}$$

$$C_f = 1,328 \sqrt{\frac{\gamma}{U_0 l}} = 1,328 \frac{1}{\sqrt{Re_l}}$$

Rq: Cette expression de C_f n'est valable que pour un écoulement laminaire $Re_l < 5 \cdot 10^5$

Dans l'expérience, l'expression de C_x n'est pas valable ^{au voisinage de $x=0$} mais cependant elle est bien vérifiée pour les valeurs de Re_l très grands.

V. LES SOLUTIONS AFFINES

Les transformations affines (ou semblables) sont un groupe de transformations liés aux changements d'échelles de grandeurs intervenants dans le phénomène physique considéré. Ces transformations laissent invariant l'ensemble des solutions des systèmes envisagés (dans notre cas c'est le système d'équations aux dérivées partielles non-linéaires)

On cherchera la transformation qui :

$$\begin{aligned} x &\longrightarrow X = \alpha x \\ y &\longrightarrow Y = \beta y \\ \text{f. courant } \psi(x,y) &\longrightarrow \Phi(X,Y) = \gamma \psi(x,y) \end{aligned}$$

Puisque cette transformation laisse invariant l'ensemble des solutions du système $\Rightarrow x, y$ et $\Phi(x,y)$ vérifient les équations de la couche limite.

* Equation du m^{st} (en régime permanent)

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (1)$$

* Conditions aux limites

$$y=0 \Rightarrow u=v=0 \quad (\text{sur la paroi}) \quad (2)$$

$$y \rightarrow \infty \Rightarrow u = U_e(x) \quad (\text{Ecoulement potentiel}) \quad (3)$$

Les équations en fonction de X, Y et $\Phi(X,Y)$ sont :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial Y} \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial X \partial Y} - \frac{\partial \Phi}{\partial X} \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial Y^2} = U_e(X) \cdot \frac{\partial U_e(X)}{\partial X} + \nu \frac{\partial^3 \Phi}{\partial Y^3} \quad (4)$$

$$Y=0 ; \quad \frac{\partial \Phi}{\partial Y} = \frac{\partial \Phi}{\partial X} = 0 \quad (5)$$

$$Y \rightarrow \infty ; \quad u = \frac{\partial \Phi}{\partial Y} = U_e(X) \quad (6)$$

Les équations corrigées en fonction de (x, y, Φ) sont:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^3 \Psi}{\partial y^3}$$

or $x = X/\alpha$; $y = Y/\beta$ et $\Psi = \gamma \Phi/\delta$

On remplace x, y et Ψ par leurs valeurs, on obtient:

$$\frac{\partial(\Phi/\delta)}{\partial(Y/\beta)} \cdot \frac{\partial^2(\Phi/\delta)}{\partial(X/\alpha)\partial(Y/\beta)} - \frac{\partial(\Phi/\delta)}{\partial(X/\alpha)} \cdot \frac{\partial^2(\Phi/\delta)}{\partial(Y/\beta)^2} = \alpha \cdot U_e(x/\alpha) \cdot \frac{\partial U_e(x/\alpha)}{\partial(x/\alpha)} + \gamma \cdot \frac{\partial^3(\Phi/\delta)}{\partial(Y/\beta)^3}$$

qui donne:

$$\frac{\alpha/\beta^2}{\gamma\delta} \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial Y} \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial X \partial Y} - \frac{\partial \Phi}{\partial X} \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial Y^2} \right\} = \alpha \cdot U_e(x/\alpha) \cdot \frac{\partial U_e(x/\alpha)}{\partial x} + \frac{\beta^3 \gamma}{\delta} \frac{\partial^3 \Phi}{\partial Y^3} \quad (7)$$

Multiplications l'équation (7) $\times \frac{\delta}{\beta^3}$ on aura:

$$\frac{\alpha}{\gamma\beta} \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial Y} \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial X \partial Y} - \frac{\partial \Phi}{\partial X} \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial Y^2} \right\} = \frac{\alpha\delta}{\beta^3} U_e(x/\alpha) \cdot \frac{\partial U_e(x/\alpha)}{\partial x} + \gamma \frac{\partial^3 \Phi}{\partial Y^3} \quad (7)$$

Par analogie entre les équations

De même les conditions aux limites (2-3) donnent:

$$y=0 ; \frac{\alpha}{\gamma} \frac{\partial \Phi}{\partial X} = -\frac{\beta}{\delta} \frac{\partial \Phi}{\partial Y} = 0 \quad (8)$$

$$y \rightarrow \infty ; u = \frac{\beta}{\gamma} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial Y} = U_e(x/\alpha) \quad (9)$$

Par analogie entre les équations (4-6) et (7-9) on obtient:

$$\frac{\alpha}{\gamma\beta} = 1 \quad (10)$$

$$\frac{\alpha\delta}{\beta^3} U_e(x/\alpha) \cdot \frac{dU_e(x/\alpha)}{dx} = U_e(x) \cdot \frac{dU_e(x)}{dx} \quad (11)$$

$$U_e(x) = \frac{\delta}{\beta} U_e(x/\alpha) \quad (12)$$

$$\text{Dérivons (12) / } x \Rightarrow U_e'(x) = \frac{\gamma}{\alpha \beta} U_e'(x/\alpha)$$

Divisons cette dernière équation par l'éq₁ (12) :

$$\frac{U_e'(x)}{U_e(x)} = \frac{\frac{\gamma}{\alpha \beta} U_e'(x/\alpha)}{\left(\frac{\gamma}{\beta} \cdot U_e(x/\alpha)\right)} = \frac{1}{\alpha} \frac{U_e'(x/\alpha)}{U_e(x/\alpha)} \quad \forall x \quad (13)$$

Puisque l'éq₁ (13) est valable $\forall x$ donc prenons $x=1$:

$$x=1 \Rightarrow \alpha x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{\alpha}$$

donc :

$$\frac{U_e'(1)}{U_e(1)} = x \cdot \frac{U_e'(x)}{U_e(x)}$$

L'intégration de cette équation / x donne :

$$\ln \frac{U_e(x)}{C} = \frac{U_e'(1)}{U_e(1)} \ln x = m \ln x \quad \text{avec} \quad \frac{U_e'(1)}{U_e(1)} = m$$

$$\text{donc } \boxed{U_e(x) = C \cdot x^m}$$

La vitesse du fluide potentiel
"solutions affines"

Alors pour avoir des solutions affines, il faut que l'écoulement potentiel "loin de la paroi" doit avoir une forme de vitesse

$U_e(x) = C x^m$, équation équivalente à :

$$U_e(x) = C \cdot x^m \quad (14)$$

Rq: Dans le cas de la plaque plane ($m=0$ et $U_e(x) = C = V_0$).

Dans le cas d'une solution de la forme (éq 14), l'éq₁ (11) s'écrit alors :

$$\frac{\alpha \gamma}{\beta^3} \cdot C \cdot \left(\frac{x}{\alpha}\right)^m \cdot \left\{ \frac{C}{\alpha^m} \cdot m x^{m-1} \right\} = C \cdot x^m \cdot C \cdot m \cdot x^{m-1}$$

$$\Rightarrow \frac{\gamma}{\beta^3 \alpha^{2m-1}} = 1 \quad (15)$$

et l'éq₁ (12) donne :

$$\frac{\gamma}{\beta \cdot \alpha^m} = 1 \quad (16)$$

On a donc 3 équations en α, β et γ :

$$(10) \quad \frac{\alpha}{\gamma\beta} = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\beta} = \frac{\gamma}{\alpha}$$

$$(15) \quad \frac{\gamma}{\beta^2 \alpha^{2m-1}} = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\beta} \cdot \frac{1}{\beta^2} \cdot \frac{\gamma}{\alpha^{2m-1}} = 1$$

$$(16) \quad \frac{\gamma}{\beta \cdot \alpha^m} = 1$$

On remarque que la combinaison des équations (10) et (15) donne l'éq^t (16) de (15) $\Rightarrow \frac{\gamma}{\alpha} \left\{ \frac{\gamma}{\beta^2 \alpha^{2m-1}} \right\} = 1 \stackrel{(10)}{\Rightarrow} \left\{ \frac{\gamma}{\beta \cdot \alpha^m} \right\}^2 = 1 \Rightarrow \text{éq^t (16)}.$

On a alors uniquement deux relations indépendantes (10) et (16) et pour avoir des solutions affines il faut que :

$$\begin{cases} Ue(x) = C \cdot x^m \\ \frac{\alpha}{\gamma\beta} = 1 \\ \frac{\gamma}{\beta \alpha^m} = 1 \end{cases}$$

On peut exprimer γ et β en fonction de α pour réduire le nombre d'inconnues en une seule.

$$\text{on a : } \frac{1}{\beta} = \frac{\gamma}{\alpha} \quad \text{et} \quad \frac{1}{\beta} \cdot \frac{\gamma}{\alpha^m} = \frac{\gamma^2}{\alpha^{m+1}} = 1 \Rightarrow \gamma^2 = \alpha^{m+1}$$

$$\text{donc } \gamma = \alpha^{\frac{m+1}{2}} \quad (17)$$

$$\text{et } \beta = \frac{\alpha}{\gamma} = \alpha^{\frac{1-m}{2}} \quad (18)$$

Donc la transformation qui \bar{a} : $x = \alpha x, y = \beta y, \bar{\Phi} = \gamma \Psi$ forme un groupe de transformations affines si et seulement si :

$$Ue(x) = C \cdot x^m \quad \text{avec } m = \frac{Ue(1)}{Ue(1)}$$

La forme de la fonction de courant $\Psi(x, y)$ est :

$$\Psi(x, y) = \frac{1}{\gamma} \bar{\Phi}(\alpha x, \beta y) = \alpha^{-\frac{m+1}{2}} \cdot \bar{\Phi}\left(\alpha x, y \alpha^{\frac{1-m}{2}}\right)$$

avec α une constante arbitraire :

prenons le cas : $\alpha x = 1 \Rightarrow \alpha = \frac{1}{x} \Rightarrow \Psi(x, y) = x^{\frac{m+1}{2}} \cdot \Phi(1, y \cdot x^{\frac{m-1}{2}})$

$$\Rightarrow \Psi(x, y) = x^{\frac{m+1}{2}} \cdot f(y \cdot x^{\frac{m-1}{2}}) \quad (19)$$

Or on sait qu'à l'extérieur de la couche limite:

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} = U_e(x) \frac{dU_e(x)}{dx} = C \cdot x^m \cdot m C x^{m-1} = m C^2 x^{2m-1}$$

Prenons le terme $(y x^{\frac{m-1}{2}})$ comme adimensionnel.

$$y \cdot x^{\frac{m-1}{2}} = \frac{y}{\sqrt{x}} \cdot x^{\frac{m}{2}} = \frac{y}{\sqrt{x}} \cdot \sqrt{\frac{U_e(x)}{C}} = y \cdot \sqrt{\frac{U_e(x)}{x}} \cdot A \quad (\text{pour } m=1)$$

Cherchons la dimension de A.

$$\sqrt{\frac{U_e(x)}{x}} \cdot A = L^{-1} \Rightarrow T^{-1/2} \cdot A = L^{-1} \Rightarrow [A] = L^{-1} \cdot T^{1/2}$$

et $[A^2] = L^{-2} \cdot T$ c'est la dimension de $\frac{1}{\nu}$

$$\text{donc } A = \frac{1}{\sqrt{\nu}}$$

Introduisons donc la variable adimensionnelle η tq:

$$\eta = y \sqrt{\frac{U_e}{\nu x}} \quad (20)$$

et la fonction de courant:

$$\Psi(x, y) = x^{\frac{m+1}{2}} \cdot f(\eta)$$

Puisque $f(\eta)$ est sans dimension, il faut que $x^{\frac{m+1}{2}}$ ait la même dimension que $\Psi(x, y)$:

$$V \cdot L = [x^{\frac{m+1}{2}}] = F$$

$$L^2 T^{-1} = [\sqrt{x} \cdot x^{\frac{m}{2}}] = \sqrt{x} \cdot \sqrt{\frac{U_e}{C}} = \sqrt{x \cdot U_e} [B]$$

$$L^2 \cdot T^{-1} = [L \cdot L \cdot T^{-1}]^{1/2} [B] \Rightarrow [B] = L \cdot T^{-1/2} = \sqrt{\nu}$$

ce qui donne la forme de $\Psi(x, y)$

$$\Psi(x, y) = \sqrt{U_e \cdot \nu \cdot x} \cdot f(\eta) \quad (20) \quad \text{avec } \eta = y \sqrt{\frac{U_e}{\nu x}}$$

La connaissance de ψ et η nous permettra de résoudre l'équation de la couche limite:

$$* \quad u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = (U_c \gamma x)^{1/2} \cdot \left(\frac{U_c}{\gamma x}\right)^{1/2} f' = U_c \cdot f' = C x^m f'$$

$$v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = -\sqrt{\gamma C} \cdot \frac{m+1}{2} \cdot x^{\frac{m-1}{2}} f - \sqrt{C} \sqrt{C} \cdot y f' \frac{m-1}{2} x^{\frac{m+1}{2}} \cdot x^{\frac{m-3}{2}}$$

$$* \quad v = -\sqrt{\gamma C} \frac{m+1}{2} x^{\frac{m-1}{2}} f - C y \frac{m-1}{2} x^{\frac{m-1}{2}} f'$$

$$\text{avec: } \frac{\partial \eta}{\partial x} = y \sqrt{\frac{C}{\gamma}} \frac{m-1}{2} x^{\frac{m-3}{2}}$$

$$* \quad \frac{\partial u}{\partial x} = m C x^{m-1} f' + C x^{\frac{3m-3}{2}} y \sqrt{\frac{C}{\gamma}} \frac{m-1}{2} f''$$

$$* \quad \frac{\partial u}{\partial y} = C x^{\frac{3m-1}{2}} \sqrt{\frac{C}{\gamma}} f''$$

$$* \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = C x^{2m-1} \frac{C}{\gamma} f'''$$

L'équation de la C.L. d'un écoulement permanent et laminaire
 trait, $u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ donne l'équation suivante.

$$m f'^2 - \frac{m+1}{2} f f'' = f''' + m \Rightarrow f''' + \frac{m+1}{2} f f'' + m(1-f'^2) = 0$$

Une équation différentielle du 3^{ème} ordre et dont la résolution nécessite 3 conditions aux limites suivantes:

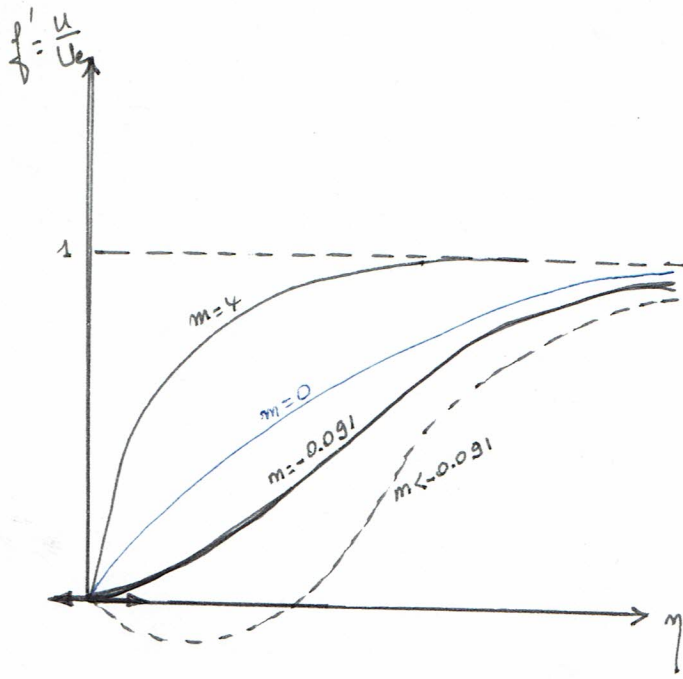
$$\left\{ \begin{array}{l} y=0 \quad (\eta=0) \Rightarrow \begin{array}{l} f'(0) = 0 \\ f(0) = 0 \end{array} \\ y \rightarrow \pm\infty \quad (\eta \rightarrow \pm\infty) \Rightarrow f'(\infty) = 1 \end{array} \right.$$

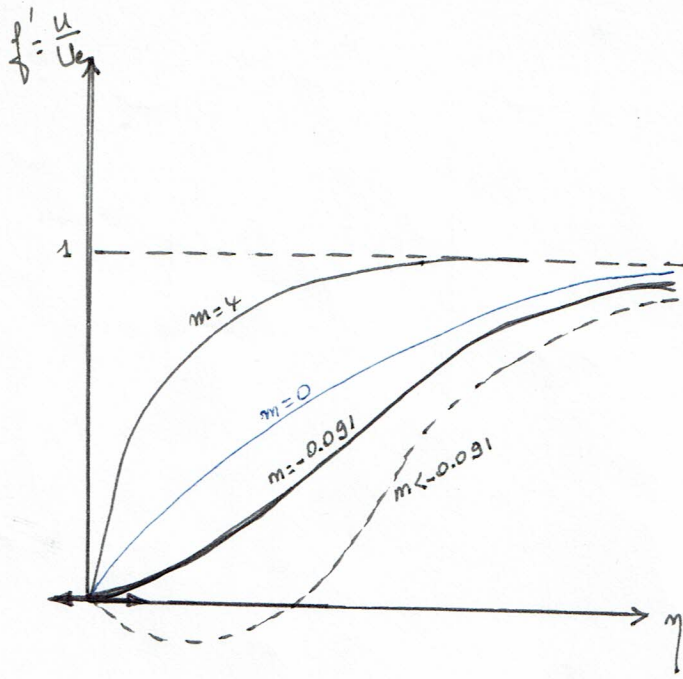
C'est la solution des couches limites pour lesquelles les vitesses de l'écoulement extérieur sont sous la forme:

$$U_c(x) = C x^m \quad \text{avec} \quad m = \frac{U_c'(1)}{U_c(1)}$$

Cas particuliers:

- si $m=0 \Rightarrow f''' + \frac{1}{2} f f'' = 0$ (cas de la plaque plane infinie)
- On obtient la même forme de la vitesse pour 1 écoulement dans un convergent.





VI.2 SOLUTION AFFINE DE FALKNER-SKAN AVEC GRADIENT DE PRESSION. "Equation de Blasius généralisée"

Il s'agit de trouver une forme de solution affine générale et de vérifier les conditions d'écoulement pour une telle solution.

Si dans le même cas d'écoulement sur une plaque plane (Blasius), On considère l'existence d'un gradient de pression, c-à-d U fonction de x alors on a vu qu'à la frontière entre l'écoulement à l'intérieur et à l'extérieur de la couche limite, il y'a "superposition" (matching), entre les pressions dont la distribution est donnée par l'équation de Bernoulli:

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} = U \cdot \frac{dU}{dx}$$

La solution affine proposée par Falkner/Skan est:

$$u(x, y) = U(x) \cdot f'(\eta) \quad \text{avec} \quad \eta = y / \sqrt{\frac{\nu}{U} x}$$

A partir de l'équation de continuité:

$$\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial u}{\partial x} = -f' \cdot \frac{dU}{dx} - U \cdot f'' \cdot \eta \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{d\sqrt{x}}{dx}\right) = \frac{U \eta}{\sqrt{x}} f'' - f' U'$$

$$v = \int_0^{\eta} \frac{U \eta}{\sqrt{x}} f'' d\eta - \int_0^{\eta} f' U' d\eta = \frac{U}{\sqrt{x}} \cdot \frac{\eta}{\sqrt{x}} \int_0^{\eta} \eta f'' d\eta - U \frac{\eta}{\sqrt{x}} \int_0^{\eta} f' d\eta$$

$$\text{donc} \quad v = U \frac{\eta}{\sqrt{x}} [\eta f' - f] - U \frac{\eta}{\sqrt{x}} f = U \frac{\eta}{\sqrt{x}} \eta f' - f \frac{d(U \eta)}{dx}$$

Les termes de l'éq^t de Navier-Stokes:

$$U U' f'^2 - \left(U^2 \frac{\eta'}{\sqrt{x}} + U U' \right) f \cdot f'' = U U' + \frac{\nu U}{\sqrt{x}} f'''$$

Multiplications les termes de l'équation par $\frac{\sqrt{x}}{\nu}$:

$$f''' + \left[\frac{\eta}{\sqrt{x}} \frac{d(U \eta)}{dx} \right] f f'' + \left[\frac{U \eta^2}{\sqrt{x}} \frac{dU}{dx} \right] (1 - f'^2) = 0$$

Si une solution affine existe, ceci devrait être une équation différentielle ordinaire à coefficients constants.

$$\text{On pose} \quad \frac{\eta}{\sqrt{x}} \frac{d(U \eta)}{dx} = \alpha \cdot \eta \quad \text{et} \quad \frac{U \eta^2}{\sqrt{x}} \frac{dU}{dx} = \beta = \text{cte}$$

On obtient l'équation différentielle en $f(\eta)$:

$$f''' + \alpha f f'' + \beta(1 - f'^2) = 0$$

A partir de cette analyse, pour trouver une solution exacte aux équations de la couche limite on suit les étapes suivantes :

- 1- Choisir et attribuer une valeur aux constantes α et β .
- 2- Calculer les valeurs correspondantes à $U(x)$ et $Q_s(x)$ en intégrant par rapport à x .
- 3- Résoudre l'équation différentielle ordinaire $f(\eta)$ par intégration numérique en considérant les conditions aux limites.
- 4- Exprimer $u(x, y)$.

Remarque : α : représente le coefficient de la fonction produit U^2
 β : " " " " U

exemple : pour $\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = 0$ } On obtient la solution produit de Blasius ($f''' + \frac{1}{2} f \cdot f'' = 0$) voir page 8)

Par comparaison avec la solution affine précédente :

$$\begin{cases} \alpha = \frac{m+1}{2} \\ \beta = m \end{cases}$$